Από: $\bigcup_{i\in I} A_i^\circ \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$ για $i=2$ έχω: $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$ (*)

<u>Πχ</u> στον $(\mathbb{R}, |\,|)$. $A=(0,1)$ και $B=[1,2]$

$\Rightarrow A^\circ=(0,1)$ και $B^\circ=(1,2) \Rightarrow A^\circ \cup B = (0,1)\cup(1,2)$

ενώ $(A\cup B)^\circ = ((0,2])^\circ = (0,2)$ άρα ισχύει

$(A\cup B)^\circ \supset A^\circ\cup B^\circ$ (όχι $\supseteq$, χωρίς δηλ. όμως το $=$)

Έτσι παρατηρώ ότι δεν ισχύει πάντα το αντίστροφο του (*)

<u>Πρόταση</u>

A, B υποσύνολα ενός μ.χ. (E,ρ) τότε $\bar A\cap\bar B=\emptyset \Rightarrow (A\cup B)^\circ = A^\circ\cup B^\circ$

<u>Απόδειξη</u>

Ισχύει $A^\circ\cup B^\circ\subseteq(A\cup B)^\circ$ από (*). Άρα αρκεί ν.δ.ο. $(A\cup B)^\circ\subseteq A^\circ\cup B^\circ$.

Θεωρώ x τυχόν:

$x\in(A\cup B)^\circ \Leftrightarrow (\exists U(x)): U(x)\subseteq A\cup B^{(1)}$. Άρα $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$

άρα $x\in A$ ή $x\in B$

i) $x\in A \xRightarrow{A\subseteq\bar A} x\in\bar A \xRightarrow[(2)]{\bar A\cap\bar B=\emptyset} x\notin\bar B \Rightarrow \sim(x\in\bar B) \Rightarrow \sim[(\forall V(x)): V(x)\cap B\neq\emptyset]$

$\Rightarrow (\exists V(x)): V(x)\cap B=\emptyset \Rightarrow (\exists V(x)): V(x)\subseteq B^c$

Θεωρώ $W(x)=U(x)\cap V(x) \Rightarrow W(x)\subseteq U(x) \wedge W(x)\subseteq V(x) \xRightarrow{\text{Από (1) και 2}}$

$W(x)\subseteq A\cup B \wedge W(x)\cap B=\emptyset \Rightarrow W(x)\subseteq A \Rightarrow x\in A^\circ \Rightarrow x\in A^\circ\cup B^\circ$

ii) Χωρίς να χάσω τη γενικότητα θεωρώ $x\in B$ και καταλήγω πάλι στο αποτέλεσμα που θέλαμε

<u>Άσκηση</u>

1) $\bar A\cap B=\emptyset=A\cap\bar B \Rightarrow (A\cup B)^\circ = A^\circ\cup B^\circ$

2) Να βρεθεί αντιπαράδειγμα τέτοιο ώστε μια περιοχή του x να μην είναι υποσύνολο κάθε περιοχής της τομής του

$\left(W(x)=U(x)\cap\dots\cap V(x) \not\Rightarrow W(x)\subseteq U(x) \text{ και } \dots \text{ και } W(x)\subseteq V(x)\right)$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

Εφαρμογή

Έστω E μ.χ. με $A \subseteq E$. Ν.δ.ο.

i) $\rho(x,A)=0 \iff x\in\bar{A}$

ii) $\delta(A)=\delta(\bar{A})$

iii) $\rho(x,A)=\rho(x,\bar{A})$ με $x\in E$

Απόδειξη

i) $x\in\bar{A} \iff (\forall r>0): B(x,r)\cap A \neq \emptyset \iff (\forall r>0): y\in B(x,r) \wedge y\in A \iff$
$(\forall r>0)(\exists y\in A): \rho(x,r)<r \overset{?}{\iff} \rho(x,A)=0$

Απόδειξη του (?)

Έστω $\rho(x,A)=\vartheta>0 \xrightarrow{\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)} (\forall y\in A): \rho(x,y)\geq\vartheta$ ΑΤΟΠΟ

ii) Ας είναι x,y εν $\bar{A}$. Τότε $(\forall \nu\in\mathbb{N}): B(x,\frac{1}{\nu})\cap A\neq\emptyset\neq B(y,\frac{1}{\nu})\cap A$

Άρα $(\forall\nu\in\mathbb{N})(\exists\, x_\nu, y_\nu$ εν $A): \rho(x,x_\nu)<\frac{1}{\nu}$ και $\rho(y,y_\nu)<\frac{1}{\nu}$

Παρατηρώ: $\rho(x,y)\leq\rho(x,x_\nu)+\rho(x_\nu,y_\nu)+\rho(y_\nu,y)<\frac{1}{\nu}+\delta(A)+\frac{1}{\nu}$

άρα $\rho(x,y)<\delta(A)+\frac{2}{\nu} \Rightarrow \lim\rho(x,y)\leq\lim_{\nu\to+\infty}(\delta(A)+\frac{2}{\nu}) \Rightarrow$

$\lim_{\nu\to+\infty}\rho(x,y)\leq\lim_{\nu\to+\infty}\delta(A)+\cancel{\lim_{\nu\to+\infty}\frac{2}{\nu}} \Rightarrow \rho(x,y)\leq\delta(A)$ άρα

$\left.\begin{array}{l}\delta(\bar{A})=\sup_{(x,y)\in(\bar{A})^2}\rho(x,y)\leq\delta(A)\\ \text{Αλλά } A\subseteq\bar{A}\Rightarrow\delta(A)\leq\delta(\bar{A})\end{array}\right\}\Rightarrow\delta(A)=\delta(\bar{A})$

iii) $\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)=\inf\{\rho(x,y):y\in A\}$

$\{\rho(x,y):y\in A\}\subseteq\{\rho(x,y):y\in\bar{A}\}$

$\inf\{\rho(x,y):y\in A\}\overset{(*)}{\geq}\inf\{\rho(x,y):y\in\bar{A}\}$

Απόδειξη της (*)

Ας είναι K,Λ υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $K\subseteq\Lambda$.

Παίρνω x τυχόν: $x\in K\Rightarrow x\in\Lambda\Rightarrow x\geq\inf\Lambda$

$\inf\Lambda$ είναι ένα κάτω φράγμα για τα στοιχεία του K

άρα $\inf K\geq\inf\Lambda$.

Άρα $\rho(x,A)\geq\rho(x,\bar{A})$ άρα αρκεί ν.δ.ο. $\rho(x,A)\leq\rho(x,\bar{A})$

Έστω ε τυχόν θετικός αριθμός. Τότε

$(\exists y\in\bar{A}): \rho(x,y)\leq\rho(x,\bar{A})+\frac{\varepsilon}{2}$ (?)

$\Downarrow$

$B(y,\frac{\varepsilon}{2})\cap A\neq\emptyset \Rightarrow (\exists y_1\in A): \rho(y,y_1)<\frac{\varepsilon}{2}$

$\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)\leq\rho(x,y_1)\leq\rho(x,y)+\rho(y,y_1)<\rho(x,\bar{A})+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\rho(x,\bar{A})+\varepsilon$

$\rho(x,A)<\rho(x,\bar{A})+\varepsilon$ $(\forall\varepsilon>0)$ Άρα $\rho(x,A)\leq\rho(x,\bar{A})$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

Απόδειξη του (?)

Έστω ότι ισχύει το (?) άρα $(\forall y \in A): \rho(x,y) > \rho(x,A) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\underbrace{}_{*\text{ φράγμα}}$ άρα

$\inf_{y\in A} \rho(x,y) \geq \rho(x,A) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \rho(x,A) \geq \rho(x,A) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \leq 0$ ΑΤΟΠΟ

ΑΣΚΗΣΗ

ν.δ.ο. $[\alpha,+\infty)^\circ = (\alpha,+\infty)$

Θεωρώ x τυχόν: $x > \alpha$ και $r = \frac{x-\alpha}{2}$

έχω $B(x,r) = (x-r, x+r) \subseteq [\alpha,+\infty)$ άρα

Ενώ $x \in [\alpha,+\infty)^\circ$, $\alpha \notin [\alpha,+\infty)^\circ$

Άσκηση

E μ.χ. με $\alpha \in E$ κ $V \subseteq E$

Ν.δ.ο. V δεν είναι περιοχή του $\alpha \Leftrightarrow \alpha \in (V^\circ)^c = \overline{V^c}$.

Έστω λοιπόν V όχι περιοχή του $\alpha \Leftrightarrow \sim$($V$ περιοχή του α) $\Leftrightarrow$

$\sim[(\exists r>0): B(\alpha,r) \subseteq V] \Leftrightarrow (\forall r>0): B(\alpha,r) \not\subseteq V \Leftrightarrow (\forall r>0): B(\alpha,r) \cap V^c \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow \alpha \in \overline{V^c}$

Ιδιότητες για την ΔΙΑΦΟΡΑ

Έστω E μ.χ. με $A \subseteq E$ κ $B \subseteq E$

Ν.δ.ο. i) $(A-B)^\circ = A^\circ - \overline{B}$ κ ii) $\overline{A-B} \subseteq \overline{A} - B^\circ$

i) $(A-B)^\circ = (A \cap B^c)^\circ = A^\circ \cap (B^c)^\circ = A^\circ \cap (\overline{B})^c = A^\circ - \overline{B}$

ii) $\overline{A-B} = \overline{A \cap B^c} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B^c} = \overline{A} \cap (B^\circ)^c = \overline{A} - B^\circ$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

(22)

Έστω E διαν. χώρος των φραγμένων συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο I. Ν.δ.ο. η συνάρτηση με τύπο:

$\rho(f,g) = \sup_{x\in I}|f(x)-g(x)|$ ορίζει μετρική στο E.

$\boxed{\text{Λύση}}$: Παρατηρώ ότι $|f(x)-g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq M$ γιατί f, g φραγμένες

Ισχύουν προφανώς $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ και $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

άρα είναι όντως ο E διαν. χώρος.

i) $\rho(f,g) = 0 \Longleftrightarrow \sup_{x\in I}|f(x)-g(x)| = 0 \Leftrightarrow (\forall x\in I): |f(x)-g(x)| = 0 \Leftrightarrow$
$f(x)-g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Longleftrightarrow f = g$ στο I

ii) Η (ii) ιδιότητα της μετρικής βγαίνει προφανώς.

iii) $\rho(f,g) = \sup_{x\in I}|f(x)-g(x)| \leq \sup_{x\in I}\left(|f(x)-w(x)|+|w(x)-g(x)|\right) \leq$
$\leq \sup_{x\in I}|f(x)-w(x)| + \sup_{x\in I}|w(x)-g(x)| = \rho(f,w)+\rho(g,w)$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi